

Unidad I: Introducción a los métodos numéricos

1.1 Importancia de los métodos numéricos

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas.

Los métodos numéricos nos vuelven aptos para entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora, reducir esquemas numéricos básicos, escribir programas y resolverlos en una computadora y usar correctamente el software existente para dichos métodos y no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras sino que también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

El análisis numérico trata de diseñar métodos para “aproximar” de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente.

El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones “aproximadas” a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética. Se requiere de una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático.

1.2 Conceptos básicos: cifra significativa, precisión, exactitud, incertidumbre y sesgo

Cifra significativa:

El concepto de cifra significativa lo podemos definir como aquella que aporta información no ambigua ni superflua acerca de una determinada medida experimental, son cifras significativas de un número vienen determinadas por su

error. Son cifras que ocupan una posición igual o superior al orden o posición de error.

Cuando se emplea un número en un cálculo, debe haber seguridad de que pueda usarse con confianza. El concepto de cifras significativas tiene dos implicaciones importantes en el estudio de los métodos numéricos.

1.- Los métodos numéricos obtienen resultados aproximados. Por lo tanto, se debe desarrollar criterios para especificar que tan precisos son los resultados obtenidos.

2.- Aunque ciertos números representan número específicos, no se pueden expresar exactamente con un número finito de cifras.

Reglas de operaciones con cifras significativas.

Regla 1: los resultados experimentales se expresan con una sola cifra dudosa, e indicando con + - la incertidumbre en la medida.

Regla 2: las cifras significativas se cuentan de izquierda a derecha, a partir del primer dígito diferente de cero y hasta el dígito dudoso.

Regla 3: al sumar o restar dos números decimales, el número de cifras decimales del resultado es igual al de la cantidad con el menor número de ellas.

Regla 4: al multiplicar o dividir dos números, el número de cifras significativas del resultado es igual al del factor con menos cifras.

Precisión y exactitud:

En ingeniería, ciencia, industria, estadística, exactitud y precisión no son equivalentes. Es importante resaltar que la automatización de diferentes pruebas o técnicas puede producir un aumento de la precisión. Esto se debe a que con dicha automatización, lo que logramos es una disminución de los errores manuales o su corrección inmediata.

Precisión: se refiere a la dispersión del conjunto de valores obtenidos de mediciones repetidas de una magnitud. Cuanto menor es la dispersión mayor la precisión. Una medida común de la variabilidad es la desviación estándar de las mediciones y la precisión se puede estimar como una función de ella.

Exactitud: se refiere a cuán cerca del valor real se encuentra el valor medido. En términos estadísticos, la exactitud está relacionada con el sesgo de una estimación. Cuanto menor es el sesgo más exacto es una estimación.

También se refiere a la aproximación de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa.

Cuando expresamos la exactitud de un resultado se expresa mediante el error absoluto que es la diferencia entre el valor experimental y el valor verdadero.

También es la mínima variación de magnitud que puede apreciar un instrumento.

Incertidumbre:

Incertidumbre también se le conoce como Imprecisión. Se refiere al grado de alejamiento entre sí, a las diversas aproximaciones a un valor verdadero.

Situación bajo la cual se desconocen las probabilidades de ocurrencia asociados a los diferentes resultados de un determinado evento.

Sesgo:

Existe sesgo cuando la ocurrencia de un error no aparece como un hecho aleatorio (al azar) advirtiéndose que este ocurre en forma sistemática

Es un alejamiento sistemático del valor verdadero a calcular.

1.3 Tipos de errores

ERROR ABSOLUTO, ERROR RELATIVO.

Podemos distinguir dos tipos de errores que se utilizan en los cálculos:

Error absoluto. Es la diferencia entre el valor de la medida y el valor tomado como exacta. Puede ser positivo o negativo, según si la medida es superior al valor real o inferior (la resta sale positiva o negativa). Tiene unidades, las mismas que las de la medida.

Error relativo

Es el cociente (la división) entre el error absoluto y el valor exacto. Si se multiplica por 100 se obtiene el tanto por ciento (%) de error. Al igual que el error absoluto puede ser positivo o negativo (según lo sea el error absoluto) porque puede ser por exceso o por defecto. No tiene unidades.

$$\epsilon_r = 100 \frac{\Delta x}{x} \%$$

ERROR DE REDONDEO

Muchas veces, los computadores cortan los números decimales entre el 17° y 12° decimal introduciendo así un error de redondeo

Por ejemplo, el valor de "e" se conoce como 2.718281828... Hasta el infinito.

Si cortamos el número en 2.71828182 (8 cifras significativas luego del punto decimal) estamos obteniendo un error de

$$E = 2.718281828 - 2.71828182 = 0.000000008...$$

Sin embargo, como no consideramos que el número que seguía al corte era mayor que 5, entonces nos convenía dejar el número como 2.71828183, caso en el cual el error sería solo de

$$E = 2.718281828 - 2.71828183 = -0.000000002...$$

,que en términos absolutos es mucho menor que el anterior.

En general, el error de corte de las computadoras será muy inferior al error introducido por un usuario, que generalmente corta a un menor número de cifras significativas.

ERRORES DE TRUNCAMIENTO

Los errores de truncamiento tienen relación con el método de aproximación que se usará ya que generalmente frente a una serie infinita de términos, se tenderá a cortar el número de términos, introduciendo en ese momento un error, por no utilizar la serie completa (que se supone es exacta).

En una iteración, se entiende como el error por no seguir iterando y seguir aproximándose a la solución. En un intervalo que se subdivide para realizar una serie de cálculos sobre él, se asocia al número de paso, resultado de dividir el intervalo "n" veces.

ERROR NUMERICO TOTAL

El error numérico total se entiende como la suma de los errores de redondeo y truncamiento introducidos en el cálculo.

Pero aquí surge un gran problema. Mientras más cálculos se tengan que realizar para obtener un resultado, el error de redondeo se irá incrementando. Pero por otro lado, el error de truncamiento se puede minimizar al incluir más términos en la ecuación, disminuir el paso o proseguir la iteración (o sea mayor número de cálculos y seguramente mayor error de redondeo).

1.4 Software de cómputo numérico

Muchos problemas de cómputo en ingeniería pueden ser divididos en pedazos de cálculos bien conocidos, como solución de sistemas de ecuaciones lineales, transformada rápida de Fourier, etc. Por consecuencia, frecuentemente el programador sólo tiene que escribir una rutina pequeña (driver) para el problema particular que tenga, porque el software para resolver las subtarear se encuentra ya disponible. De esta forma la gente no tiene que realizar el problema una y otra vez.

Para álgebra lineal y algunos otros cálculos numéricos básicos hay software de calidad gratis (a través de Netlib).

NETLIB

Netlib (NET LIBrary) es una colección grande de software, documentos, bases de datos gratis que son de interés para las comunidades científicas y de métodos numéricos. El depósito es mantenido por los Laboratorios Bell de AT&T, la Universidad de Tennessee y el Laboratorio Nacional Oak Ridge, y replicado en varios sitios alrededor del mundo.

Netlib contiene software de alta calidad que ha sido probado en forma intensiva, pero todo el software libre no tiene garantía y tiene poco soporte. Para poder usar el software, primero se tiene que descargar en su computadora y entonces compilarlo.

PAQUETES DE SOFTWARE COMERCIAL PARA CÓMPUTO NUMÉRICO GENERAL:

NAG

El Grupo de Algoritmos numéricos (Numerical Algorithms Group) (NAG) ha desarrollado una biblioteca de Fortran conteniendo alrededor de 1000 subrutinas accesibles al usuario para resolver problemas generales de matemáticas

aplicadas, incluyendo: ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, transformada rápida de Fourier, cuadratura, álgebra lineal, ecuaciones no lineales, ecuaciones integrales, y más.

IMSL

La biblioteca numérica de Fortran IMSL hecha por Visual Numerics, Inc. cubre muchas de las áreas contenidas en la biblioteca NAG. También tiene soporte para analizar y presentar datos estadísticos en aplicaciones científicas y de negocios.

NUMERICAL RECIPES

Los libros de Numerical Recipes in C/Fortran son muy populares entre los ingenieros porque pueden ser usados como libro de cocina donde se puede encontrar una "receta (recipe)" para resolver algún problema a mano. Sin embargo, el software correspondiente de Numerical Recipes no es comparable en alcance o calidad al dado por NAG o IMSL. Es un software muy usado en universidades, centros de investigación y por ingenieros. En los últimos años ha incluido muchas más capacidades, como la de programar directamente procesadores digitales de señal, crear código VHDL y otras.

MATLAB

Es un programa de cálculo numérico, orientado a matrices y vectores. Por tanto desde el principio hay que pensar que todo lo que se pretenda hacer con él, será mucho más rápido y efectivo si se piensa en términos de matrices y vectores.

GNU OCTAVE

Es un programa libre para realizar cálculos numéricos. Como indica su nombre es parte de proyecto GNU. MATLAB es considerado su equivalente comercial. Entre varias características que comparten se puede destacar que ambos ofrecen un intérprete permitiendo ejecutar órdenes en modo interactivo. Nótese que Octave

no es un sistema de álgebra computacional como podría ser GNU Máxima, sino que usa un lenguaje que está orientado al análisis numérico.

1.5 Métodos iterativos

Un método iterativo trata de resolver un problema matemático (como una ecuación o un sistema de ecuaciones) mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. Esta aproximación contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema de una sola vez (como resolver un sistema de ecuaciones $Ax=b$ encontrando la inversa de la matriz A). Los métodos iterativos son útiles para resolver problemas que involucran un número grande de variables (a veces del orden de millones), donde los métodos directos tendrían un coste prohibitivo incluso con la potencia del mejor computador disponible.